गणित प्रकाश (कक्षा 6)

(https://braingain19.in/)

अध्याय-1 "गणित में पैटर्न"

कक्षा 6 के गणित अध्याय-1 "गणित में पैटर्न" Class 6th Math

अध्याय का सारांश (Summary of the Chapter)

शब्दावली (Glossary)

शब्द	परिभाषा
गणित (Mathematics)	पैटर्नों की खोज और उनके अस्तित्व के कारणों का स्पष्टीकरण।
संख्या सिद्धांत (Number Theory)	गणित की वह शाखा जो पूर्ण संख्याओं के पैटर्नों का अध्ययन करती है।
संख्या अनुक्रम (Sequence)	संख्याओं का एक व्यवस्थित क्रम जो किसी विशिष्ट नियम का पालन करता है।
त्रिभुजाकार संख्याएँ	वे संख्याएँ जिन्हें बिंदुओं के माध्यम से त्रिभुज के आकार में व्यवस्थित किया जा सकता है (जैसे: 1, 3, 6, 10)।
वर्ग संख्याएँ (Square Numbers)	वे संख्याएँ जो एक वर्ग ग्रिड में व्यवस्थित की जा सकती हैं (जैसे: 1, 4, 9, 16)।
ज्यामिति (Geometry)	गणित की वह शाखा जिसमें आकारों के पैटर्नों का अध्ययन किया जाता है।
सम बहुभुज (Regular Polygon)	ऐसी बंद आकृति जिसकी सभी भुजाएँ और कोण समान हों।
षड्भुजाकार संख्याएँ	वे संख्याएँ जो छह भुजाओं वाली षड्भुज आकृति के पैटर्न में होती हैं (जैसे: 1, 7, 19, 37)।
संपूर्ण आलेख (Complete Graph)	एक ज्यामितीय आकार अनुक्रम जहाँ प्रत्येक बिंदु अन्य सभी बिंदुओं से रेखाओं द्वारा जुड़ा होता है।
विराहांक संख्याएँ	एक विशेष गणितीय अनुक्रम: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21...।
कोच हिमकिण (Koch Snowflake)	एक पुनरावृत्ति आधारित आकार अनुक्रम जो रेखाखंडों को 'गति उभार' में बदलकर बनाया जाता है।

1. गणित पैटर्न की खोज और उनके अस्तित्व का स्पष्टीकरण है।
2. सबसे मौलिक पैटर्न संख्या अनुक्रम हैं (जैसे विषम, सम, वर्ग, त्रिभुजाकार संख्याएँ)।
3. चित्रों और आकारों (Shapes) के उपयोग से संख्या अनुक्रमों को समझना सरल हो जाता है।
4. आकार अनुक्रम जैसे सम बहुभुज, संपूर्ण ग्राफ और कोच हिमकण गणित के रोचक पहलुओं को दर्शाते हैं।

गणित में पैटर्न: एक विस्तृत अध्ययन मार्गदर्शिका : यह कक्षा 6 के गणित अध्याय "गणित में पैटर्न" का एक व्यापक विश्लेषण और अध्ययन मार्गदर्शिका है। इसका उद्देश्य छात्रों को गणितीय पैटर्नों की खोज, उनके पीछे के कारणों और उनके व्यावहारिक अनुप्रयोगों को समझने में सहायता करना है।

BRAINGAIN19.in

गणित प्रकाश (कक्षा 6)

(https://braingain19.in/)

अध्याय-1 "गणित में पैटर्न"

प्रश्नावली 1.1 गणित में पैटर्न

प्रश्न : 1. क्या आप अन्य उदाहरणों के विषय में सोच सकते हैं, जहाँ गणित दैनिक जीवन में हमारी सहायता करता है ?

उत्तर: गणित हमारे दैनिक जीवन का एक अभिन्न हिस्सा है। इसके कुछ अन्य उदाहरण निम्नलिखित हैं:

(i). बजट बनाना: घर के मासिक खर्चों का हिसाब रखने और बचत की योजना बनाने में गणित हमारी मदद करता है।

(ii).रसोई में खाना बनाना: सामग्री को सही अनुपात (जैसे—एक कप पानी में दो चम्मच चीनी) में मापने के लिए गणित की आवश्यकता होती है।

(iii). खरीदारी: बाज़ार में सामान खरीदते समय छूट (Discount) की गणना करना और बिल का भुगतान करने में गणित का उपयोग होता है।

(iv). समय प्रबंधन: अपनी दिनचर्या निर्धारित करना और यह तय करना कि किस काम को कितना समय देना है, गणित पर ही आधारित है।

(v). खेल: स्कोर गिनना,औसत निकालना या मैदान की दूरी मापने में गणित का उपयोग किया जाता है।

प्रश्न 2. गणित ने किस प्रकार मानव को आगे बढ़ाने के लिए प्रेरित करने में सहायता की है?

उत्तर: गणित ने मानव सभ्यता के विकास और प्रगति में आधारशिला के रूप में कार्य किया है। इसे हम निम्नलिखित बिंदुओं से समझ सकते हैं:

(i). वैज्ञानिक प्रगति: प्रयोगशालाओं में प्रयोग करने, जटिल डेटा का विश्लेषण करने और अंतरिक्ष विज्ञान में ग्रहों की दूरी मापने के लिए गणित अनिवार्य है।

(ii). इंजीनियरिंग और निर्माण: पुलों, विशाल बांधों और आधुनिक इमारतों का निर्माण बिना सटीक ज्यामितीय (Geometry) और त्रिकोणमितीय गणनाओं के संभव नहीं था।

(iii). आधुनिक तकनीक: टीवी, स्मार्टफोन और कंप्यूटर जैसे उपकरण 'कोडिंग' और 'एल्गोरिदम' पर आधारित हैं, जो पूरी तरह गणितीय तर्क पर चलते हैं।

(iv). अर्थव्यवस्था और लोकतंत्र: देश का बजट तैयार करना, मुद्रास्फीति की दर समझना और चुनाव परिणामों का सांख्यिकीय विश्लेषण करना गणित के बिना असंभव है।

(v).यातायात के साधन: साइकिल से लेकर रॉकेट तक, हर वाहन की गति, ईंधन क्षमता और डिजाइन को गणितीय सिद्धांतों द्वारा बेहतर बनाया गया है।

(vi). समय का ज्ञान: कैलेंडर और घड़ियों के विकास ने मानव को समय के महत्व और योजनाबद्ध तरीके से कार्य करने की प्रेरणा दी है।

प्रश्नावली 1.2 गणित में पैटर्न

प्रश्न 1: क्या आप सारणी 1 में दिए प्रत्येक अनुक्रम में पैटर्न की पहचान कर सकते हैं?

सारणी 1— संख्या अनुक्रमों के उदाहरण

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,....	(सभी '1')
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...	(गणन संख्याएँ)
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...	(विषम संख्याएँ)
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...	(सम संख्याएँ)
1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ...	(त्रिभुजाकार संख्याएँ)
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ...	(वर्ग संख्याएँ)
1, 8, 27, 64, 125, 216, ...	(घन संख्याएँ)
1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...	(विरहांक संख्याएँ)
1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...	(2 की घातें)
1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, ...	(3 की घातें)

गणित प्रकाश (कक्षा 6)

(https://braingain19.in/)

अध्याय-1 "गणित में पैटर्न"

प्रश्नावली 1.2 गणित में पैटर्न

उत्तर: हाँ, सारणी 1 के प्रत्येक अनुक्रम में एक निश्चित गणितीय पैटर्न है। इनमें से कुछ में समान संख्या जोड़ी जा रही है, कुछ में गुणा हो रहा है, और कुछ विशिष्ट आकृतियों या घातांकों पर आधारित हैं।

प्रश्न 2: सारणी 1 में दिए प्रत्येक अनुक्रम को उसकी अगली तीन संख्याओं सहित अपनी नोटबुक पर पुनः लिखिए। प्रत्येक अनुक्रम के बाद, उस अनुक्रम में संख्याओं को बनाने वाले नियम को अपने शब्दों में लिखिए।

उत्तर:

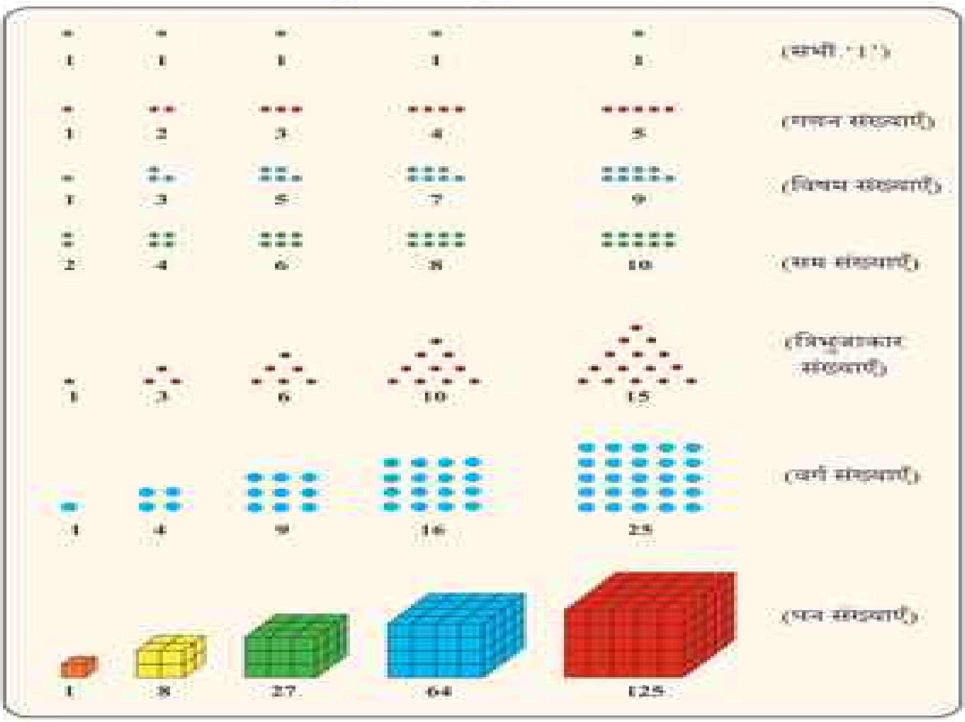
अनुक्रम (Sequence)	अगली तीन संख्याएँ	नियम (शब्दों में)
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1...	1, 1, 1	इस अनुक्रम में प्रत्येक पद स्थिर है; संख्या हमेशा 1 रहती है।
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7...	8, 9, 10	यह प्राकृतिक गणना संख्याएँ हैं। हर बार पिछली संख्या में 1 जोड़ा जाता है।
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13...	15, 17, 19	ये विषम संख्याएँ हैं। प्रत्येक अगली संख्या प्राप्त करने के लिए 2 जोड़ा जाता है।
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14...	16, 18, 20	ये सम संख्याएँ हैं। इसमें भी प्रत्येक पद में 2 जोड़कर अगला पद मिलता है।
1, 3, 6, 10, 15, 21, 28...	36, 45, 55	ये त्रिभुजाकार संख्याएँ हैं। इसमें क्रमशः +2, +3, +4, +5... जोड़ते जाते हैं।
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49...	64, 81, 100	ये वर्ग संख्याएँ हैं। यह प्राकृतिक संख्याओं के वर्ग (n2) का क्रम है।
1, 8, 27, 64, 125, 216...	343, 512, 729	ये घन संख्याएँ हैं। यह प्राकृतिक संख्याओं के घन (n3) का क्रम है।
1, 2, 3, 5, 8, 13, 21...	34, 55, 89	ये विरहांक (Fibonacci) संख्याएँ हैं। अगली संख्या पिछली दो संख्याओं का योग होती है।
1, 2, 4, 8, 16, 32, 64...	128, 256, 512	ये 2 की घातें हैं। प्रत्येक अगली संख्या पिछली संख्या को 2 से गुणा करके आती है।
1, 3, 9, 27, 81, 243, 729...	2187, 6561, 19683	ये 3 की घातें हैं। प्रत्येक अगली संख्या पिछली संख्या को 3 से गुणा करके आती है।

प्रश्नावली 1.3 गणित में पैटर्न

प्रश्न 1: सारणी 2 में दिए संख्या अनुक्रमों को चित्रात्मक रूप से दर्शाने के लिए अपनी नोटबुक में प्रतिलिपि बनाकर प्रत्येक अनुक्रम के लिए अगला चित्र बनाइए।

उत्तर:

सारणी 2 — कुछ संख्या अनुक्रमों का चित्रीय निरूपण



गणित प्रकाश (कक्षा 6)

(https://braingain19.in/)

अध्याय-1 "गणित में पैटर्न"

प्रश्नावली 1.3 गणित में पैटर्न

प्रश्न 2: 1, 3, 6, 10... को 'त्रिभुजाकार संख्याएँ' क्यों कहते हैं? 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49...को वर्ग संख्याएँ (Square Numbers) या वर्ग क्यों कहलाती हैं? 1, 8, 27, 64, 125 .... घन संख्याएँ (Cube Numbers) या घन क्यों कहलाती हैं?

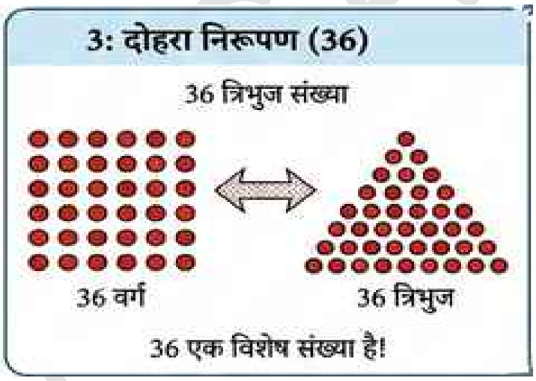
उत्तर: 1, 3, 6, 10... को त्रिभुजाकार संख्याएँ इसलिए कहते हैं क्योंकि इन संख्याओं को बिंदुओं (Dots) द्वारा एक त्रिभुज के आकार में व्यवस्थित किया जा सकता है। 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49...को वर्ग संख्याएँ इसलिए कहते हैं क्योंकि इन संख्याओं के बिंदुओं को एक वर्ग ग्रिड (grid) के रूप में व्यवस्थित किया जा सकता है। 1, 8, 27, 64, 125 .... घन संख्याएँ (Cube Numbers) या घन इसलिए कहते हैं क्योंकि इन संख्याओं को त्रिविमीय (3D) घन के रूप में देखा जाता है।

अथवा

उत्तर: (i). त्रिभुजाकार संख्याएँ (1, 3, 6, 10, 15...): इन्हें इसलिए ऐसा कहा जाता है क्योंकि इनके बिंदुओं को एक समबाहु त्रिभुज (Equilateral Triangle) के आकार में व्यवस्थित किया जा सकता है।(ii). वर्ग संख्याएँ (1, 4, 9, 16, 25...): इन्हें बिंदुओं की मदद से एक पूर्ण वर्ग (Square) के रूप में सजाया जा सकता है। यह किसी संख्या को उसी से गुणा करने पर प्राप्त होती हैं (जैसे 3×3=9)।
(iii). घन संख्याएँ (1, 8, 27, 64...): ये संख्याएँ 3D आकार यानी घन (Cube) बनाने के काम आती हैं। जैसे 8 बिंदुओं से 2×2×2 का एक छोटा ठोस डिब्बा बन सकता है।

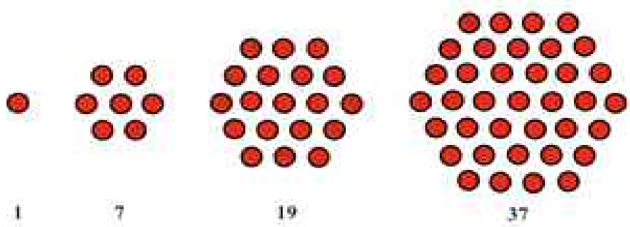
प्रश्न 3: आपने ध्यान दिया होगा कि 36 एक त्रिभुजाकार संख्या और वर्गाकार संख्या दोनों है। अर्थात् 36 बिंदुओं को त्रिभुज और वर्ग दोनों में पूरी तरह व्यवस्थित किया जा सकता है। इसे स्पष्ट करते हुए अपनी नोटबुक में चित्र बनाइए।
इससे ज्ञात होता है कि एक ही संख्या को अलग-अलग तरीकों से दर्शाया जा सकता है और संदर्भ के आधार पर अलग-अलग भूमिकाएँ निभाई जा सकती हैं। कुछ अन्य संख्याओं को अलग-अलग तरीकों से चित्रात्मक रूप से दर्शाने का प्रयास कीजिए।

उत्तर: संख्या 36 बहुत खास है क्योंकि यह दो पैटर्न में फिट बैठती है। संख्या 36 एक बहुत ही रोचक उदाहरण है क्योंकि यह त्रिकोणीय और वर्गाकार दोनों है। इसका अर्थ है कि 36 बिंदुओं को एक त्रिभुज और एक वर्ग, दोनों आकारों में सजाया जा सकता है।
(I). वर्ग के रूप में: यह 6×6 का एक वर्ग बनाती है।
(ii). त्रिभुज के रूप में : यह 1 से 8 तक की संख्याओं का योग है (1+2+3+4+5+6+7+8=36), जिससे एक बड़ा त्रिभुज बनता है।
चित्र की बनावट : इसमें बिंदुओं को पंक्तियों में इस तरह रखा जाता है कि हर अगली पंक्ति में एक बिंदु बढ़ जाता है।



जैसे : 3: पहली पंक्ति में 1 बिंदु,
दूसरी में 2 बिंदु (1+2)
6: पहली में 1, दूसरी में 2, तीसरी में 3 बिंदु (1+2+3)

प्रश्न 4: आप संख्याओं के निम्नलिखित अनुक्रम को क्या कहेंगे ?
(यहाँ 1, 7, 19 और 37 बिंदुओं वाले षड्भुजाकार पैटर्न के चित्र दिए गए हैं)



इन्हें षड्भुजाकार (hexagonal) संख्याएँ कहते हैं। इन्हें अपनी नोटबुक में बनाइए। अनुक्रम में अगली संख्या क्या होगी?

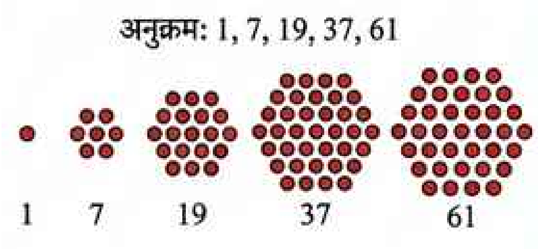
अध्याय-1 "गणित में पैटर्न"

प्रश्नावली 1.3 गणित में पैटर्न

उत्तर: इस अनुक्रम में अंतर 6,12,18 (6 का गुणज) बढ़ रहा है।अतः अगली संख्या 37+24=61 होगी।
दिए गए पैटर्न को देखें:

- 1
- 1+6=7
- 7+12=19
- 19+18=37
- 37 + 24=61

यहाँ हर बार जुड़ने वाली संख्या 6 की टेबल (6, 12, 18...) के हिसाब से बढ़ रही है। अगला अंतर 24 होगा (18+6=24)। अगली संख्या 61 होगी।
अतः अगली संख्या = 37+24= 61



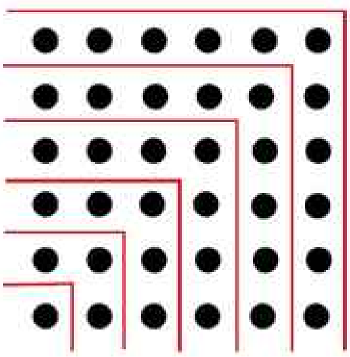
प्रश्न 5: क्या आप '2 की घात' के अनुक्रम का चित्रीय निरूपण कर सकते हैं? '3 की घात' का?

उत्तर : 2 की घात (2, 4, 8, 16...): इन्हें 'द्विभाजन' (Branching) के रूप में दिखाया जा सकता है। जैसे एक पेड़ की टहनी से दो टहनियाँ निकलना, फिर उन दो से चार। यह कंप्यूटर मेमोरी और बैक्टीरिया के बढ़ने जैसा पैटर्न है।
3 की घात (3, 9, 27...): इसे एक बिंदु से तीन शाखाएँ निकलने वाले पैटर्न या 'फ्रैक्टल्स' (Fractals) के रूप में दिखाया जा सकता है।
प्रश्न 6: विषम संख्याओं को क्रमिक रूप से जोड़ने पर क्या पैटर्न बनता है?
उत्तर: क्रमिक विषम संख्याओं को जोड़ने पर हमेशा एक वर्ग संख्या प्राप्त होती है:

- 1=1 (1^2)
- 1+3=4 (2^2)
- 1+3+5=9 (3^2)
- 1+3+5+7=16 (4^2)

प्रश्नावली 1.4 गणित में पैटर्न

प्रश्न 1: गणन संख्याओं को ऊपर और नीचे जोड़ने पर वर्ग संख्याएँ क्यों प्राप्त होती हैं?
Question: Why do we get square numbers when we add counting numbers up and down (like 1,1+2+1,1+2+3+2+1,...)?
उत्तर (Hindi): जब हम 1 से शुरू करके किसी संख्या n तक जाते हैं और फिर वापस 1 तक आते हैं, तो यह एक वर्ग (Square) बनाता है।



गणित प्रकाश (कक्षा 6)

(https://braingain19.in/)

अध्याय-1 "गणित में पैटर्न"

प्रश्नावली 1.4 गणित में पैटर्न

चित्र में दिए गए 6×6 ग्रिड को देखें। यदि आप इसे तिरछा (diagonally) गिनेंगे, तो बिंदुओं की संख्या 1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1=36 होगी, जो कि 6^2 है।

Ans (English) : Adding numbers in a sequence like 1+2+3+2+1 creates a square. For n=3, the sum is 1+2+3+2+1=9, which is 32. Visually, this represents the total dots in a square grid when counted along diagonals.

प्रश्न :2. 1+2+3+⋯+99+100+99+⋯+3+2+1 का मान क्या होगा?

Question: What will be the value of the sum up to 100 and back to 1?

उत्तर (Solution): जैसा कि हमने पिछले प्रश्न में देखा, इस तरह के जोड़ का परिणाम मध्य वाली संख्या (Peak number) का वर्ग होता है। यहाँ मध्य संख्या 100 है। अतः, मान =100×100=10,000

English: The sum of such a symmetric sequence is the square of the middle number. Middle number =100, so Sum $=100^2=10{,}000$.

प्रश्न :3. सभी '1' वाले अनुक्रम को जोड़ने पर क्या प्राप्त होता है?

Question: What sequences do you get when you add '1s' upwards and then upwards and downwards?

उत्तर (Hindi): केवल ऊपर की ओर जोड़ने पर (1,1+1,1+1+1...): हमें प्राकृतिक संख्याएँ (Natural Numbers) प्राप्त होती हैं: 1,2,3,4,...

ऊपर और नीचे जोड़ने पर (1,1+1+1,1+1+1+1+1...): हमें विषम संख्याएँ (Odd Numbers) प्राप्त होती हैं: 1,3,5,7,...

English: Adding '1s' upwards gives Natural Numbers (1,2,3...). Adding them in a pyramid style (1+1+1) results in Odd Numbers (1,3,5...).

प्रश्न :4. गणन संख्याओं को ऊपर की ओर जोड़ने पर क्या प्राप्त होता है?

Question: What sequence is formed by adding counting numbers upwards (1,1+2,1+2+3,...)?

उत्तर (Hindi): इससे हमें त्रिभुजाकार संख्याएँ (Triangular Numbers) प्राप्त होती हैं: 1,3,6,10,15,...English: Summing consecutive natural numbers results in Triangular Numbers: 1,3,6,10,15,...

प्रश्न :5. क्रमागत त्रिभुजाकार संख्याओं के युग्मों को जोड़ने पर क्या होता है?

Question: What happens when you add pairs of consecutive triangular numbers?

हल (Solution): * 1+3=4 (2^2)

3+6=9 (3^2)

6+10=16 (4^2)

10+15=25 (5^2) निष्कर्ष: दो क्रमागत त्रिभुजाकार संख्याओं का योग हमेशा एक वर्ग संख्या (Square Number) होता है।

English: Adding consecutive triangular numbers always results in a Square Number.

प्रश्न : 6. 2 की घातों को जोड़ने और 1 जोड़ने पर क्या प्राप्त होता है?

Question: What happens when you sum powers of 2 (starting from 1) and then add 1 to the result?

हल (Solution):

1→ जोड़िए 1→1+1=2 (2^1)

1+2=3→ जोड़िए 1→3+1=4 (2^2)

1+2+4=7→ जोड़िए 1→7+1=8 (2^3)

1+2+4+8=15→ जोड़िए 1→15+1=16 (2^4)

निष्कर्ष: हमें 2 की अगली घात (Next power of 2) प्राप्त होती है।

English: Summing powers of 2 and adding 1 results in the next power of 2 (2n).

BRAINGAIN19.in

गणित प्रकाश (कक्षा 6)

(https://braingain19.in/)

अध्याय-1 "गणित में पैटर्न"

प्रश्न :7. जब आप त्रिभुजाकार संख्याओं को 6 से गुणा करते हैं और 1 जोड़ते हैं, तो क्या प्राप्त होता है?
Question: What happens when you multiply triangular numbers by 6 and add 1? Which sequence do you get?
हल (Hindi): त्रिभुजाकार संख्याएँ (Triangular Numbers) हैं: 1,3,6,10,15,...

(1×6)+1=7

(3×6)+1=19

(6×6)+1=37

(10×6)+1=61

निष्कर्ष: हमें षट्भुजाकार संख्याएँ (Hexagonal Numbers) प्राप्त होती हैं (जिन्हें 'Centered Hexagonal Numbers' भी कहा जाता है)। चित्र में आप देख सकते हैं कि एक बिंदु के चारों ओर षट्भुज के रूप में बिंदु बढ़ रहे हैं।

English: Multiplying triangular numbers by 6 and adding 1 gives Centered Hexagonal Numbers. For example, (3×6)+1=19, which forms a perfect hexagon of dots around a center point.

प्रश्न : 8. जब आप षट्भुजाकार संख्याओं को जोड़ना प्रारंभ करते हैं, तब क्या होता है? (जैसे: 1,1+7,1+7+19...)
Question: What happens when you start adding these hexagonal numbers? (e.g., 1,1+7,1+7+19,...)
हल (Hindi): आइए इनका योग करके देखते हैं:

1=1 (जो कि 1^3 है)

1+7=8 (जो कि 2^3 है)

1+7+19=27 (जो कि 3^3 है)

1+7+19+37=64 (जो कि 4^3 है) निष्कर्ष: षट्भुजाकार संख्याओं का योग करने पर हमें पूर्ण घन संख्याएँ (Perfect Cube Numbers) प्राप्त होती हैं। आपके चित्र में दिया गया रंगीन घन (Cube) इसी को दर्शाता है कि कैसे अलग-अलग परतें मिलकर एक बड़ा घन बनाती हैं।

English: Adding consecutive centered hexagonal numbers results in Cube Numbers (n3). For instance, 1+7+19=27, which is 3×3×3. This is visually represented by the layers of the 3D cube shown in your image.

प्रश्न :9. सारणी 1 के अनुक्रमों में अन्य पैटर्न या संबंध खोजिए।
Question: Find other patterns or relationships between different sequences from Table 1.
उत्तर (Hindi): गणित में आकारों और संख्याओं के बीच गहरा संबंध होता है। उदाहरण के लिए:

दो लगातार त्रिभुजाकार संख्याओं का योग एक वर्ग संख्या होती है (जैसा हमने पिछले पृष्ठ पर देखा)।

संख्याओं के पैटर्न को 1D (रेखा), 2D (तल/आकार), और 3D (घन/ठोस) में देखा जा सकता है। इसे ही ज्यामिति (Geometry) के साथ जोड़कर पढ़ा जाता है।

English: This question encourages exploring the link between shapes and numbers. A key pattern is that numbers can represent dimensions: dots in a row (1D), dots forming a square or triangle (2D), and dots/blocks forming a cube (3D).

प्रक्रिया (Process)	प्राप्त परिणाम (Resulting Sequence)
त्रिभुजाकार संख्या x 6 + 1	षट्भुजाकार संख्या (Hexagonal Number)
षट्भुजाकार संख्याओं का योग	घन संख्या (Cube Number)
आकारों का अध्ययन	ज्यामिति (Geometry)

BRAINGAIN19.in

गणित प्रकाश (कक्षा 6)

(https://braingain19.in/)

अध्याय-1 "गणित में पैटर्न"

प्रश्नावली 1.5 गणित में पैटर्न

प्रश्न 1: क्या आप सारणी 3 के प्रत्येक अनुक्रम में पैटर्न की पहचान कर सकते हैं?
उत्तर: हाँ, प्रत्येक अनुक्रम एक विशेष नियम का पालन करता है। जैसे 'ढेरित वर्ग' में भुजा की लंबाई 1-1 इकाई बढ़ रही है, और 'सम बहुभुज' में हर बार एक नई भुजा जुड़ रही है।

सारणी 3 में पाँच मुख्य अनुक्रम दिखाए गए हैं:
सम बहुभुज (Regular Polygons): त्रिभुज (3 भुजाएँ) से शुरू होकर दशभुज (10 भुजाएँ) तक।

संपूर्ण आलेख (Complete Graphs): जहाँ हर बिंदु दूसरे हर बिंदु से जुड़ा होता है (K2,K3,K4...)।

ढेरित वर्ग (Stacked Squares): 1×1,2×2,3×3... ग्रिड।

ढेरित त्रिभुज (Stacked Triangles): छोटे त्रिभुजों से बने बड़े त्रिभुज।

कोच हिमकण (Koch Snowflake): एक रोचक फ्रैक्टल पैटर्न जो हर बार अधिक जटिल होता जाता है।

प्रश्न 2: क्या आप प्रत्येक अनुक्रम में अगले आकार को खींच सकते हैं? क्यों और क्यों नहीं?
उत्तर: हाँ, क्योंकि हम पैटर्न का नियम (Rule) समझ चुके हैं। जैसे दशभुज (10 भुजाओं) के बाद 11 भुजाओं वाली आकृति आएगी। हालांकि, 'कोच हिमकण' जैसे जटिल आकारों को हाथ से खींचना कठिन होता जाता है क्योंकि रेखाखंड बहुत छोटे हो जाते हैं।

1. सम बहुभुज (Regular Polygons)
प्रश्न : 3. सम बहुभुजों के प्रत्येक आकार अनुक्रम में भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए। आपको कौन-सा संख्या अनुक्रम प्राप्त होता है? आकृतियों के कोणों के विषय में आप क्या कहेंगे?
Question: Find the number of sides in each shape of the regular polygon sequence. What number sequence do you get? What can you say about the angles of these shapes?
उत्तर : हल (Solution):

भुजाओं की संख्या (Number of sides): 3 (त्रिभुज), 4 (चतुर्भुज), 5 (पंचभुज), 6 (षड्भुज), ..., 10 (दशभुज)।

अनुक्रम (Sequence): 3,4,5,6,7,8,9,10,... (यह प्राकृतिक संख्याओं का अनुक्रम है)।

कोण (Angles): जैसे-जैसे भुजाओं की संख्या बढ़ती है, प्रत्येक आंतरिक कोण (interior angle) का मान बढ़ता जाता है और आकृति धीरे-धीरे एक वृत्त (Circle) के समान दिखने लगती है।

2. संपूर्ण आलेख (Complete Graphs)
प्रश्न : 4. संपूर्ण आलेखों के प्रत्येक आकार अनुक्रम में रेखाओं की संख्याओं की गणना कीजिए। इससे आपको कौन-सा संख्या अनुक्रम प्राप्त होता है?
Question: Count the number of lines in each shape of the complete graph sequence. What number sequence do you get from this?
हल (Solution):

K2: 1 रेखा (line)

K3: 3 रेखाएँ

K4: 6 रेखाएँ

K5: 10 रेखाएँ

K6: 15 रेखाएँ

अनुक्रम (Sequence): 1,3,6,10,15,...

निष्कर्ष (Conclusion): यह त्रिभुजाकार संख्याओं (Triangular Numbers) का अनुक्रम है।

3. ढेरित वर्ग (Stacked Squares)

BRAINGAIN19.in

गणित प्रकाश (कक्षा 6)

(https://braingain19.in/)

अध्याय-1 "गणित में पैटर्न"

प्रश्न : 5. ढेरित वर्गों के अनुक्रम के प्रत्येक आकार में कितने छोटे वर्ग हैं? इससे कौन-सा संख्या अनुक्रम प्राप्त होता है?
Question: How many small squares are there in each shape of the stacked square sequence? What number sequence is obtained from this?

हल (Solution):

पहला आकार: $1\times1=1$ छोटा वर्ग

दूसरा आकार: $2\times2=4$ छोटे वर्ग

तीसरा आकार: $3\times3=9$ छोटे वर्ग

चौथा आकार: $4\times4=16$ छोटे वर्ग

अनुक्रम (Sequence): 1,4,9,16,25,...

निष्कर्ष (Conclusion): यह वर्ग संख्याओं (Square Numbers) का अनुक्रम है।

4. ढेरित त्रिभुज (Stacked Triangles)

प्रश्न : 6. ढेरित त्रिभुजों के अनुक्रम के प्रत्येक आकार में कितने छोटे त्रिभुज हैं? इससे कौन-सा संख्या अनुक्रम प्राप्त होता है? Question: How many small triangles are there in each shape of the stacked triangle sequence? What number sequence is obtained from this?

हल (Solution):

- पहला आकार: 1 छोटा त्रिभुज
- दूसरा आकार: 4 छोटे त्रिभुज
- तीसरा आकार: 9 छोटे त्रिभुज
- चौथा आकार: 16 छोटे त्रिभुज
- अनुक्रम (Sequence): 1,4,9,16,...
- निष्कर्ष (Conclusion): आश्चर्यजनक रूप से, यह भी वर्ग संख्याओं (Square Numbers) का ही अनुक्रम है!

5. कोच हिमकण (Koch Snowflake)

प्रश्न : 7. कोच हिमकण के प्रत्येक आकार में कुल कितने रेखाखंड हैं? इनके संगत संख्या अनुक्रम क्या हैं?
Question: How many line segments are there in each shape of the Koch snowflake? What is the corresponding number sequence?

हल (Solution):

प्रत्येक चरण में, एक रेखाखंड को 4 नए छोटे रेखाखंडों से बदल दिया जाता है।

प्रारंभिक त्रिभुज: 3 रेखाखंड

चरण 1: $3\times4=12$ रेखाखंड

चरण 2: $12\times4=48$ रेखाखंड

चरण 3: $48\times4=192$ रेखाखंड

अनुक्रम (Sequence): 3,12,48,192,...

नियम (Rule): यह 4 की घात का तीन गुना ($3\times4n$) है।

BRAINGAIN19.in

गणित प्रकाश (कक्षा 6)

(https://braingain19.in/)

अध्याय-1 "गणित में पैटर्न"

भाग 1: लघु-उत्तरीय प्रश्नावली

नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर 2-3 वाक्यों में दें।

प्रश्न : 1.स्रोत के अनुसार 'गणित' की परिभाषा क्या है?
उत्तर: गणित मूलतः पैटर्नों (प्रणतरूपों) की खोज और उन पैटर्नों के अस्तित्व के कारणों का स्पष्टीकरण है। यह प्रकृति, कला और प्रौद्योगिकी में मौजूद संरचनाओं को समझने का एक माध्यम है।
प्रश्न : 2. गणितज्ञ गणित को कला और विज्ञान दोनों रूपों में क्यों देखते हैं?
उत्तर: पैटर्नों को खोजना और उन्हें समझना एक आनंददायक और रचनात्मक कार्य है, इसलिए इसे कला माना जाता है। साथ ही, इनके पीछे के तार्किक कारणों और नियमों की व्याख्या करने के कारण इसे विज्ञान के रूप में देखा जाता है।
प्रश्न : 3. तारों और ग्रहों की गति के पैटर्न को समझने से मानवता को क्या लाभ हुआ?
उत्तर: खगोलीय पिंडों की गति के पैटर्नों की समझ ने मानव को गुरुत्वाकर्षण का सिद्धांत विकसित करने में मदद की। इसी ज्ञान के आधार पर हम चंद्रमा और मंगल पर उपग्रह प्रक्षेपित करने और रॉकेट भेजने में सफल हुए हैं।
प्रश्न : 4.'संख्या सिद्धांत' (Number Theory) से आप क्या समझते हैं?
उत्तर: गणित की वह शाखा जिसमें पूर्ण संख्याओं (0, 1, 2, 3, 4...) के पैटर्नों का अध्ययन किया जाता है, संख्या सिद्धांत कहलाती है। संख्या अनुक्रम इसके सबसे मौलिक और आकर्षक प्रकारों में से एक हैं।
प्रश्न : 5.गणितीय अवधारणाओं को समझने में 'दृश्यांकन' (Visualization) क्यों महत्वपूर्ण है?
उत्तर: चित्रों या आरेखों के माध्यम से गणितीय वस्तुओं का दृश्यांकन करने से जटिल पैटर्नों और संकल्पनाओं को समझना आसान और अधिक प्रभावशाली हो जाता है। यह अमूर्त संख्याओं को एक ठोस आकार देता है।
प्रश्न : 6.विषम संख्याओं के योग और वर्ग संख्याओं के बीच क्या संबंध है?
उत्तर: जब हम 1 से शुरू करते हुए क्रमिक विषम संख्याओं को जोड़ते हैं, तो हमें हमेशा एक वर्ग संख्या प्राप्त होती है। उदाहरण के लिए, 1 + 3 = 4 (2 का वर्ग) और 1 + 3 + 5 = 9 (3 का वर्ग)।
प्रश्न : 7.'सम बहुभुज' (Regular Polygon) में 'सम' शब्द का क्या अर्थ है?
उत्तर: 'सम' शब्द यह दर्शाता है कि उस आकृति की सभी भुजाओं की लंबाइयाँ समान हैं और उसके सभी कोण भी एक समान हैं। उदाहरण के लिए, एक वर्ग एक सम बहुभुज है क्योंकि उसकी चारों भुजाएं और कोण बराबर होते हैं।
प्रश्न : 8.संख्या अनुक्रमों के संदर्भ में 'विराहांक संख्याएँ' क्या हैं?
उत्तर: विराहांक संख्याएँ एक विशिष्ट संख्या अनुक्रम (1, 2, 3, 5, 8, 13, 21...) हैं, जिसका अध्ययन गणितज्ञ पैटर्नों के विश्लेषण के लिए करते हैं। यह गणित में पाए जाने वाले सबसे आकर्षक अनुक्रमों में से एक है।
प्रश्न : 9.कोच हिमकिण (Koch snowflake) पैटर्न कैसे बनता है?
उत्तर: कोच हिमकिण अनुक्रम में, एक आकार से अगला आकार प्राप्त करने के लिए प्रत्येक रेखाखंड को एक 'गति उभार' (speed bump) से प्रतिस्थापित किया जाता है। जैसे-जैसे यह प्रक्रिया दोहराई जाती है, रेखाखंड छोटे होते जाते हैं और आकृति जटिल होती जाती है।
प्रश्न : 10.गणित का अंतिम लक्ष्य केवल पैटर्नों को खोजना क्यों नहीं है?
उत्तर: गणित का लक्ष्य केवल पैटर्नों की खोज करना ही नहीं है, बल्कि उनके अस्तित्व के कारणों का स्पष्टीकरण ज्ञात करना भी है। इन स्पष्टीकरणों का उपयोग उन संदर्भों से बाहर भी किया जा सकता है जहाँ उनकी खोज हुई थी, जिससे मानवता की प्रगति संभव होती है।

भाग 2: निबंधात्मक प्रश्न (Essay Questions)

निम्नलिखित प्रश्नों पर विस्तार से विचार करें और अपने उत्तर व्यवस्थित रूप से लिखें।

प्रश्न : 11. दैनिक जीवन में गणितीय पैटर्नों की भूमिका: प्रकृति के मौसम चक्र से लेकर आधुनिक तकनीक (जैसे मोबाइल फोन और कंप्यूटर) तक, गणित किस प्रकार हमारी सहायता करता है? उदाहरणों सहित विवेचना कीजिए।
उत्तर : दैनिक जीवन में गणित की भूमिका इस प्रकार है:

- प्रकृति में: पैटर्न हमारे आसपास प्रकृति में, जैसे सूर्य, चंद्रमा और तारों की गति में विद्यमान होते हैं । यह हमें मौसम चक्र को समझने में सहायता करते हैं ।
- दैनिक कार्यों में: खरीदारी से लेकर खाना बनाने और खेल खेलने (जैसे गेंद फेंकना) तक में गणितीय पैटर्न दिखाई देते हैं ।
- आधुनिक तकनीक: टी.वी., मोबाइल फोन और कंप्यूटर के निर्माण में गणितीय पैटर्नों की समझ का उपयोग किया जाता है ।

BRAINGAIN19.in

- विज्ञान और प्रगति: ग्रहों की गति के पैटर्नों की समझ ने ही गुरुत्वाकर्षण के सिद्धांत को जन्म दिया, जिससे हम अंतरिक्ष में उपग्रह और रॉकेट भेजने में सफल हुए ।

प्रश्न : 12. संख्या अनुक्रमों का दृश्यांकन: वर्ग संख्या, त्रिभुजाकार संख्या और घन संख्या के बीच के अंतर को उनके चित्रों या आरेखों के आधार पर स्पष्ट कीजिए।

उत्तर : विभिन्न प्रकार की संख्याओं को उनके बिंदुओं के आरेखीय विन्यास के आधार पर पहचाना जा सकता है:

- वर्ग संख्या (Square Numbers): इन संख्याओं के बिंदुओं को एक वर्ग ग्रिड (grid) के रूप में व्यवस्थित किया जा सकता है, जैसे 1, 4, 9, 16, 25 ।
- त्रिभुजाकार संख्या (Triangular Numbers): इन संख्याओं के बिंदुओं को एक त्रिभुज के आकार में व्यवस्थित किया जा सकता है, जैसे 1, 3, 6, 10, 15 ।
- घन संख्या (Cube Numbers): इन संख्याओं को त्रिविमीय (3D) घन के रूप में देखा जाता है, जैसे 1, 8, 27, 64 ।

प्रश्न : 13. संख्याओं के बीच आश्चर्यजनक संबंध: "विषम संख्याओं का योग" और "संख्याओं को ऊपर और नीचे की ओर जोड़ना" (1+2+3+2+1) किस प्रकार वर्ग संख्याएँ प्रदान करते हैं? इस प्रक्रिया को विस्तार से समझाएं।

उत्तर : संख्या अनुक्रम अक्सर दिलचस्प तरीकों से एक-दूसरे से संबंधित होते हैं:

- विषम संख्याओं का योग: जब हम 1 से शुरू होने वाली विषम संख्याओं को जोड़ते हैं, तो हमें हमेशा एक वर्ग संख्या प्राप्त होती है ।
  - उदाहरण: 1+3=4 (2^2), 1+3+5=9 (3^2), 1+3+5+7=16 (4^2) ।
  - इसे वर्ग ग्रिड में बिंदुओं को बाँटकर स्पष्ट रूप से समझा जा सकता है ।
- ऊपर और नीचे की ओर जोड़ना: गणन संख्याओं को एक निश्चित संख्या तक बढ़ते क्रम में और फिर वापस घटते क्रम में जोड़ने पर भी वर्ग संख्या प्राप्त होती है ।
  - उदाहरण: 1+2+1=4, 1+2+3+2+1=9, 1+2+3+4+3+2+1=16

प्रश्न : 14. आकार अनुक्रम और संख्या अनुक्रम का अंतर्संबंध: सम बहुभुज और संपूर्ण आलेख (Complete graphs) के उदाहरणों का उपयोग करते हुए समझाएं कि ज्यामितीय आकृतियाँ संख्याओं से कैसे जुड़ी हैं।

उत्तर : ज्यामितीय आकृतियाँ और संख्याएँ गहराई से जुड़ी हुई हैं:

- सम बहुभुज (Regular Polygons): इनके आकार अनुक्रम में भुजाओं की संख्या गणन संख्याओं (3, 4, 5, 6...) से संबंधित होती है । जैसे 3 भुजाओं वाला सम त्रिभुज, 4 भुजाओं वाला वर्ग, आदि ।
- संपूर्ण आलेख (Complete Graphs): इनके आकार अनुक्रम में जब हम रेखाओं (edges) की गणना करते हैं, तो एक विशिष्ट संख्या अनुक्रम प्राप्त होता है जो ज्यामितीय संरचना से जुड़ा होता है ।

प्रश्न : 15. गणित: अन्वेषण का एक उपकरण: जीनोम के पैटर्न से लेकर अंतरिक्ष विज्ञान तक, पैटर्नों की समझ ने चिकित्सा और विज्ञान के क्षेत्र में किस प्रकार क्रांतिकारी परिवर्तन लाए हैं?

उत्तर : पैटर्नों की समझ ने विभिन्न क्षेत्रों में क्रांतिकारी परिवर्तन लाए हैं:

- चिकित्सा: जीनोम (genomes) के पैटर्नों के अध्ययन ने डॉक्टरों और वैज्ञानिकों को बीमारियों का पता लगाने और उनका सटीक उपचार करने में सक्षम बनाया है ।
- विज्ञान और अंतरिक्ष: आकाशीय पिंडों की गति के पैटर्नों को समझकर ही मनुष्य ने अंतरिक्ष विज्ञान में प्रगति की और मंगल जैसे ग्रहों तक पहुँच पाया ।
- तकनीकी विकास: इंजीनियरिंग के जटिल कार्यों जैसे पुलों और भवनों का निर्माण या जटिल कंप्यूटर प्रणालियों का विकास गणितीय पैटर्नों के कारण ही संभव हो पाया है ।

BRAINGAIN19.in